

## DEGENERATIONS DE LEFSCHETZ ET VARIATIONS DE STRUCTURES DE HODGE

CLAIRE VOISIN

### 0. Introduction

Ce travail propose une réponse partielle au problème suivant, posé par R. Friedman dans [6].

**0.1. Problème.** Soit  $\mathcal{X} \xrightarrow{p} \Delta$  une dégénération de Lefschetz de variétés de dimension paire  $2m > 2$  paramétrée par le disque  $\Delta$ ; montrer qu'en général, pour tout changement de base  $\Delta_n \xrightarrow{s \rightarrow t=s^n} \Delta$  la variété  $\mathcal{X}_n^* = \mathcal{X}^* \times_{\Delta} \Delta_n$  ne peut être compactifiée en une variété lisse  $\tilde{\mathcal{X}}_n \xrightarrow{p_n} \Delta_n$  telle que  $p_n$  soit lisse au dessus de 0.

Rappelons d'abord que si  $m = 1$ , une construction due à Atiyah fournit une telle compactification: en fait le changement de base  $t = s^2$  introduit sur  $\mathcal{X}_2 = \mathcal{X} \times_{\Delta} \Delta_2$  une singularité quadratique ordinaire qui en dimension trois admet une "petite résolution"  $\tilde{\mathcal{X}}_2$ ; la fibre de  $\hat{p}_2: \tilde{\mathcal{X}}_2 \rightarrow \Delta_2$  en 0 est alors la résolution minimale de  $\mathcal{X}_0$ .

**0.2.** Dans la situation de 0.1, si  $\mathcal{X}$  est kählérienne, on sait que pour un changement de base de degré pair, qui élimine l'action de la monodromie sur la cohomologie de  $\mathcal{X}_t$ , l'application des périodes, définie sur  $\Delta_n^*$ , se prolonge en 0 (cf. [8]) munissant  $\mathcal{X}_0$  d'une structure de Hodge limite pure qui a priori ne se distingue pas de celle d'une variété lisse.

**0.3.** Par ailleurs J. Morgan montre dans [9] qu'il n'y a pas d'obstruction différentiable à l'existence de  $\tilde{\mathcal{X}}_n$ , pour certaines valeurs de  $n$ . Notons enfin que pour une dégénération de quadriques projectives  $\mathcal{Q} \rightarrow \Delta$ ,  $\mathcal{Q}_2 = \mathcal{Q} \times_{\Delta} \Delta_2$  se désingularise en  $\tilde{\mathcal{Q}}_2 \rightarrow \Delta_2$ , et le transformé strict  $\tilde{\mathcal{Q}}_0$  de la fibre centrale se contracte, de sorte que  $\mathcal{Q}_2$  est en fait biméromorphiquement équivalent à un produit  $\mathcal{Q}_{2m} \times \Delta_2$ .

**0.4.** Faisant l'hypothèse que  $\mathcal{X} \rightarrow \Delta$  est une dégénération de Lefschetz d'hypersurfaces de  $\mathbf{P}^{2m+1}$  à fibré canonique trivial (i.e., de degré  $2m + 2$ ), on prouve ici:

**Théorème.** *Si pour un entier  $n$ , il existe une compactification  $\tilde{\mathcal{X}}_n \xrightarrow{p} \Delta_n$  comme dans 0.1, alors la fibre  $\tilde{\mathcal{X}}_{n,0}$  n'est pas cohomologiquement kählérienne. (On entend par là que la suite spectrale de Fröhlicher de  $\tilde{\mathcal{X}}_{n,0}$  ne dégénère pas en  $E_1$ ). En particulier, il n'existe pas de telle compactification biméromorphe à  $\mathcal{X}_n$ .*

L'idée, très simple, qui mène à ce théorème, est que la variation de structure de Hodge sur les disques  $\Delta_n$  ( $n$  pair) n'est pas, en zéro, celle d'une famille de variétés lisses avec fibré canonique trivial et cohomologiquement kählériennes.

**Notations.** - Soit  $\mathcal{X} \xrightarrow{D} \Delta$  une famille analytique de variétés paramétrée par le disque  $\Delta$ : on note  $\mathcal{X}^* \xrightarrow{p^*} \Delta^*$  la famille  $\mathcal{X} \setminus p^{-1}\{0\} \xrightarrow{p^*} \Delta \setminus \{0\}$ ;

- On note  $\Delta_n \xrightarrow{r_n} \Delta$  le changement de base  $s \rightarrow t = s^n$ ,  $\mathcal{X}_n = \mathcal{X} \times_{\Delta} \Delta_n$ ,  $\mathcal{X}_n \xrightarrow{p_n} \Delta_n$ ,  $\mathcal{X}_{n,s} = p_n^{-1}(s)$ ;

- On note  $H_{\mathbb{Z}}^k$  le faisceau  $R^k p_* \mathbb{Z}$  sur  $\Delta$ , et  $F^p H^k$  les sous-fibrés holomorphes de  $H_{\mathbb{Z}}^k \otimes \mathcal{O}_{\Delta}$  associés à la filtration de Hodge.

- Si les fibres lisses de  $p$  admettent une décomposition de Hodge et si  $H_{\mathbb{Z}}^k$  est globalement trivial, on notera  $D$  le domaine des périodes (contenu dans un espace de drapeaux sur l'espace vectoriel  $H_{\mathbb{C}}^k$ ) et  $\mathcal{P}$  l'application des périodes, à valeurs dans  $D$ . On notera  $\mathcal{P}_K$  l'application des périodes pour les formes holomorphes. Les objets correspondants sur  $\Delta_n$  seront notés  $\mathcal{P}_n, \mathcal{P}_{n,K}$ .

## 1.

On rappelle dans cette section la topologie et la théorie de Hodge d'une dégénération de Lefschetz (d'espace total kählérien), et l'on étudie la variation de structure de Hodge en 0.

**1.1.** Soit  $\mathcal{X}$  une variété lisse kählérienne, de dimension  $2m + 1$  et  $p: \mathcal{X} \rightarrow \Delta$  propre, de rang maximal au-dessus de  $\Delta^*$ ,  $\mathcal{X}_0$  possédant pour seule singularité un point double ordinaire  $x_0$ ; dans un voisinage de  $x_0$ ,  $\mathcal{X}$  possède des coordonnées  $(x_1, \dots, x_{2m+1})$  telles que  $p$  soit décrite par  $t = \sum_1^{2m+1} x_i^2$ . L'intersection de la boule  $\sum_1^{2m+1} |x_i|^2 \leq \varepsilon$  et de la fibre  $\mathcal{X}_t$ , pour  $|t| < \varepsilon$ , a le type d'homotopie de la  $2m$ -sphère  $\sqrt{|t|} \subset \mathcal{X}_t$ , d'équations:  $x_i/\sqrt{|t|} \in \mathbb{R}, \sum |x_i|^2 = |t|$ . Cette sphère  $S_{\sqrt{|t|}}$  admet une classe de cohomologie  $S_{\sqrt{|t|}} \in H^{2m}(\mathcal{X}_t, \mathbb{Z})$ , définie à  $\pm 1$  près, et appelée cycle évanescant de  $\mathcal{X}_t$ .

**1.2.** La fibration  $\mathcal{X}^* \xrightarrow{p^*} \Delta^*$  est localement triviale, et il y a donc une action de monodromie  $\Gamma$  du lacet positif autour de zéro sur le groupe

$H^{2m}(\mathcal{X}_t, \mathbf{Z})$ : cette action est décrite par la formule de Picard-Lefschetz:

$$\Gamma(\delta_{\sqrt{t}}) = -\delta_{\sqrt{t}}, \quad \Gamma(\alpha) = \alpha \text{ si } \langle \alpha \cdot s_{\sqrt{t}} \rangle = 0.$$

1.3. Le faisceau localement constant  $R^{2m}p^*\mathbf{Z} = r_2^*(R^{2m}p^*\mathbf{Z})$  sur  $\Delta_2^*$  est donc globalement constant, puisque  $\Gamma$  est d'ordre 2. De plus les cycles  $\delta_s$  fournissent une section globale constante de ce faisceau.

1.4. Le produit fibré  $\mathcal{X}_2 \xrightarrow{p_2} \Delta_2$  admet un point double ordinaire qui se résout par éclatement  $\tilde{\mathcal{X}}_2 \xrightarrow{\tau} \mathcal{X}_2$ . La fibre  $\tilde{\mathcal{X}}_{2,0}$  est alors la réunion de  $\tilde{\mathcal{X}}_0$  et d'une quadrique  $Q_{2m}$ , se croisant le long d'une section hyperplane  $Q_{2m-1}$  de  $Q_{2m}$ , qui s'identifie à la quadrique exceptionnelle de  $\tilde{\mathcal{X}}_0 =$  désingularisée par éclatement de  $\mathcal{X}_0$ . La quadrique affine  $Q_{2m} \setminus Q_{2m-1}$  se rétracte sur un sphère  $S_0$ , limite des sphères  $S_s$  de 1.1.

1.5.  $\tilde{\mathcal{X}}_2$  est kählérienne; sur  $\Delta_2^*$  l'application des périodes  $\mathcal{P}_2$ , qui à  $s \in \Delta_2^*$  associe la filtration de Hodge sur l'espace vectoriel constant  $H^{2m}(\mathcal{X}_{2,s}, \mathbf{C})$  est à valeurs dans  $D$ : d'après [8] elle se prolonge holomorphiquement en 0.  $\mathcal{P}_2(0)$  fournit une structure de Hodge limite  $H_{\text{lim}}^{2m}$  en 0; par ailleurs  $H^{2m}(\mathcal{X}_{2,0}, \mathbf{C})$  possède une structure de Hodge mixte (en fait pure) qui se calcule à l'aide d'une suite exacte de Mayer-Vietoris. La suite exacte de Clemens-Schmid, et le fait que la monodromie soit triviale, fournissent alors une surjection  $H^{2m}(\tilde{\mathcal{X}}_{2,0}, \mathbf{C}) \rightarrow H_{\text{lim}}^{2m}$  compatible avec les structures de Hodge. On en déduit, à l'aide de 1.4, que le cycle limite  $\delta_0$  (valeur en 0 de la section  $\delta_s$ ) est de type  $(m, m)$  dans  $H_{\text{lim}}^{2m}$ , puisque la classe de  $S_0$  est de type  $(m, m)$  dans  $H^{2m}(Q_{2m})$ .

1.6. Décrivons maintenant la différentielle  $d\mathcal{P}_2$  en 0. On a la proposition suivante:

1.7. **Proposition.** *Si  $m > 1$  la différentielle  $d\mathcal{P}_{2,K}(0)$  est nulle (dans  $\text{Hom}(F^{2m}H_{\text{lim}}^{2m}, F^{2m-1}H_{\text{lim}}^{2m}/F^{2m}H_{\text{lim}}^{2m})$ ).*

*Démonstration.* On utilisera les lemmes suivants, dont la preuve est donnée plus loin.

1.8. **Lemme.** *On a un isomorphisme naturel:  $R^0\tilde{p}_2K_{\tilde{\mathcal{X}}_2/\Delta_2} \simeq r_2^*R^0pK_{\mathcal{X}/\Delta}$  où  $\tilde{p}_2 = p_2 \circ \tau$ :  $\tilde{\mathcal{X}}_2 \rightarrow \Delta_2$ ; de plus ces fibrés sont localement libres et la flèche de changement de base est un isomorphisme en tout point de  $\Delta_2$ .*

1.9. **Lemme.** *Le sous fibré  $F^{2m}H^{2m}$  de  $H_{\mathbf{C}}^{2m} \otimes \mathcal{O}_{\Delta_2}$  sur  $\Delta_2$  est isomorphe à  $R^0\tilde{p}_2K_{\tilde{\mathcal{X}}_2/\Delta_2}$ .*

D'après ces lemmes, on peut trouver des sections  $\omega_i(t)$  de  $R^0pK_{\mathcal{X}/\Delta}$  sur  $\Delta$ , telles que  $r_2^*\omega_i$  engendrent  $F^{2m}H_{\text{lim}}^{2m}$  en 0.

Par définition de  $d\mathcal{P}_{2,K}$  il suffit de montrer que  $\nabla_{\partial/\partial s}|_{s=0}(\tau_2^*\omega_i)$  est nul.

Soit  $(e_1, \dots, e_N)$  une base multivaluée de  $H_Q^{2m}$  sur  $\Delta^*$ , telle que  $\Gamma(e_1) = e_1$  pour  $i < N$ , et  $\Gamma(e_N) = -e_N$ , i.e.,  $e_N(t) = \delta_{\sqrt{t}}$ .

Sur  $\Delta^*$  on a  $R^0pK_{\mathcal{X}/\Delta} \simeq F^{2m}H^{2m} \subset H_C^{2m} \otimes \mathcal{O}_{\Delta^*}$ , et l'on peut donc écrire  $\omega_i(t) = \sum_{j=1}^N \varphi_j(t)e_j$  où les  $\varphi_j$  sont des fonctions holomorphes multivaluées. Comme  $\omega_1(t)$  est une section globale de  $H_C^{2m}$  sur  $\Delta^*$ , on a

$$\varphi_j(e^{2i\pi}t) = \varphi_j(t) \text{ pour } j < N, \quad \varphi_N(e^{2i\pi}t) = -\varphi_N(t).$$

D'autre part, comme  $r_2^*\omega_1(t)$  s'étend en une section holomorphe de  $H_C^{2m}$  sur  $\Delta_2$ , les  $\varphi_j$  sont bornées, donc s'étendent holomorphiquement pour  $j < N$ , tandis que  $\varphi_N(t) = \psi(\sqrt{t})$ , avec  $\psi$  holomorphe en 0. On a donc:

$$r_2^*\omega_i(t) = \sum_1^{N-1} \varphi_j(s^2)e_i + \psi(s)e_N,$$

et en appliquant la dérivée de Gauss-Manin en 0, on obtient:

$$\nabla_{\partial/\partial s}|_{s=0}(r_2^*\omega_i(t)) = \psi'(0)e_N.$$

Il suffit donc de prouver que  $\psi'(0) = 0$ . Mais la propriété de transversalité, qui par continuité reste vraie en 0, entraîne que  $\nabla F^{2m} \subset F^{2m-1} \otimes \Omega_{\Delta_2}$ . Comme  $m > 1$ , on a:  $F^m H_{\lim}^{2m} \perp F^{2m-1} H_{\lim}^{2m}$ , et comme le cycle évanescents  $\delta_0$  appartient à  $F^m H_{\lim}^{2m}$  (d'après 1.6), on doit avoir:

$$\nabla_{\partial/\partial s}|_{s=0}(r_2^*(\omega_1(t))) \cdot \delta_0 = 0.$$

Comme  $\delta_0 = e_N(0)$ , et  $\delta_0^2 \neq 0$ , on a donc  $\psi'(0) = 0$ , ce qui termine la démonstration.

*Preuve du Lemme 1.8.* Le fibré canonique  $K_{\tilde{\mathcal{X}}_2}$  est égal à  $\tau^*K_{\mathcal{X}_2} \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}_2}(\mathcal{E}_{2m})^{\otimes(2m-2)}$ ; d'autre part  $K_{\mathcal{X}_2} = r_2^*K_{\mathcal{X}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{X}_2}(\mathcal{X}_{2,0})$  et  $K_{\Delta_2} = r_2^*(K_{\Delta}) \otimes \mathcal{O}_{\Delta_2}(0)$ .

Donc  $K_{\tilde{\mathcal{X}}_2/\Delta_2} \simeq \tau^*(r_2^*(K_{\mathcal{X}/\Delta})) \otimes \mathcal{O}_{\tilde{\mathcal{X}}_2}(\mathcal{E}_{2m})^{\otimes(2m-2)}$ .

On en déduit aisément le premier isomorphisme.

L'isomorphisme de changement de base résulte de la constance de  $h^{2m,0}$  sur  $\Delta_2^*$ ; pour montrer que  $h^0(\tilde{\mathcal{X}}_{2,0}, K_{\tilde{\mathcal{X}}_{2,0}}) = h^{2m,0}$  on utilise la suite exacte de Clemens Schmid, qui donne:  $h^0(K_{\tilde{\mathcal{X}}_0}) = h^{2m,0}$ , et l'on compare  $h^0(K_{\tilde{\mathcal{X}}_0})$  et  $h^0(K_{\tilde{\mathcal{X}}_{2,0}})$ : le résultat est immédiat.

*Preuve du Lemme 1.9.* Il suffit de rappeler la construction de l'extension canonique des fibrés de Hodge, donnée par exemple dans [10]. Comme on a  $\Lambda^{2m}\Omega_{\tilde{\mathcal{X}}_2/\Delta_2}(\log \tilde{\mathcal{X}}_{2,0}) = K_{\tilde{\mathcal{X}}_2/\Delta_2}$ ,  $R^0\tilde{p}_2(\Lambda^{2m}\Omega_{\tilde{\mathcal{X}}_2/\Delta_2}(\log \tilde{\mathcal{X}}_{2,0}))$  est libre; il est clair d'autre part que les dérivées partant de  $E_i^{2m,0}$  dans la suite spectrale de Fröhlicher sont nulles: on a donc une surjection

$$R^0\tilde{p}_2(\Lambda^{2m}\Omega_{\tilde{\mathcal{X}}_2/\Delta_2}(\log \tilde{\mathcal{X}}_{2,0})) \rightarrow F^{2m}\mathbf{R}^{2m}\tilde{p}_2(\Omega_{\tilde{\mathcal{X}}_2/\Delta_2}^*(\log \tilde{\mathcal{X}}_{2,0})) = F^{2m}H^{2m}.$$

Comme les deux faisceaux sont libres de même rang c'est un isomorphisme.

**1.10.** On suppose désormais que  $\mathcal{L} \rightarrow \Delta$  est une dégénération de Lefschetz d'hypersurfaces de degré  $2m + 2$  de  $\mathbf{P}^{2m+1}$ , i.e.,  $\mathcal{L} \subset \Delta \times \mathbf{P}^{2m+1}$  est une hypersurface d'équation  $F(t, x) = F_0(x) + tF_1(x) + t^2F_2(x) + \dots$  où les  $F_i$  sont des polynômes homogènes de degré  $2m + 2$ .  $F_0$  a un point double ordinaire  $x_0$ ; la lissité de  $\mathcal{L}$  en  $(0, x_0)$  entraîne  $F_1(x_0) \neq 0$ . On a alors la proposition suivante.

**1.11. Proposition.** Sur  $\Delta_2$ , la différentielle de l'application des périodes  $d\mathcal{P}_2(0)$  est non nulle.

On utilisera les lemmes suivants.

**1.12. Lemme.** Soit  $(P_s)_{s \in \Delta_2}$  une famille holomorphe de polynômes homogènes de degré  $k \times (2m + 2)$  sur  $\mathbf{P}^{2m+1}$ . Alors  $\omega_s = \text{Res}_{\mathcal{L}_s} P_s \Omega / F_s^{k+1}$  est une section holomorphe de  $F^{2m-k} H^{2m}$  sur  $\Delta_2$ , pour  $k \leq m - 1$  (où  $\Omega$  est la section canonique de  $K_{\mathbf{P}^{2m+1}}(2m + 2)$ ).

*Démonstration.* Cf. [7].

**1.13. Lemme.** Soit  $(P_s)_{s \in \Delta_2}$  une famille holomorphe de polynômes homogènes de degré  $m \times (2m + 2)$  sur  $\mathbf{P}^{2m+1}$ . Alors la limite

$$\lim_{s \rightarrow 0} s \int_{S_s} \text{Res}_{\mathcal{L}_s} \frac{P_s \Omega}{F_s^{m+1}}$$

existe, est finie, et est non nulle si et seulement si  $P_0(x_0) \neq 0$ .

*Démonstration.* Comme les sphères  $S_s$  sont évanescentes on peut se placer dans un voisinage de  $x_0$  pour calculer le résidu. Soit d'abord des coordonnées homogènes  $(X_0, \dots, X_{2m+1})$  telles que  $x_0 = (1, 0, \dots, 0)$ ; dans les coordonnées affines  $x_i = X_i/X_0$ , la forme méromorphe  $P_s \Omega / F_s^{m+1}$  s'écrit  $(p_s/f_s^{m+1}) dx_1 \wedge \dots \wedge dx_{2m+1}$ , où  $p_s(x) = P_s(1, x)$  et  $f_s(x) = F_s(1, x)$ .

D'après 1.1, dans des coordonnées locales holomorphes  $(s, z_1, \dots, z_{2m+1})$  cela s'écrit:  $(h(s, z) / (\sum_1^{2m+1} z_i^2 - s^2)^{m+1}) dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{2m+1}$ , où  $h(s, z)$  est une fonction holomorphe s'annulant au même ordre que  $p_s(x)$  en  $(0, 0)$ .  $\mathcal{L}_s$  est alors définie par  $\sum_1^{2m+1} z_i^2 - s^2 = 0$ , et  $S_s$  est la  $2m$ -sphère d'équations:  $\{z_i/s \in \mathbf{R}, \sum z_i^2 = s^2\}$ .

Il suffit clairement de montrer que:

$$\lim_{s \rightarrow 0} \int_{S_s} \text{Res}_{\mathcal{L}_s} \frac{s dz_1 \wedge \dots \wedge dz_{2m+1}}{(\sum z_i^2 - s^2)^{m+1}} \neq 0.$$

Or faisant le changement de variables  $z'_i = z_i/s$  pour  $s \neq 0$  l'équation de  $\mathcal{L}_s$  devient  $\sum_1^{2m+1} z_i'^2 - 1 = 0$  et la sphère  $S_s$  est décrite par les équations:  $\{z'_i \in \mathbf{R}, \sum_1^{2m+1} z_i'^2 - 1 = 0\}$ . Enfin la forme à intégrer devient

$$\frac{dz'_1 \wedge \dots \wedge dz'_{2m+1}}{(\sum z_i'^2 - 1)^{m+1}}.$$

Le résidu de cette forme, ou plutôt son intégrale sur  $S_s$  est donc en fait constant, et non nul car il est bien connu que ce résidu engendre la cohomologie de la quadrique affine d'équation  $\sum z_i^2 = 0$ , tandis que  $S_s$  engendre son homologie (cf. [7]).

*Preuve de la Proposition 1.11.* Il suffit de montrer que la  $(m - 1)$ ième pièce de  $d\mathcal{P}_2(0)$  est non nulle dans

$$\text{Hom}(F^{m+1}H_{\text{lim}}^{2m}/F^{m+2}H_{\text{lim}}^{2m}, F^m H_{\text{lim}}^{2m}/F^{m+1}H_{\text{lim}}^{2m}).$$

Comme en 0 le cycle évanescant  $\delta_0$  est de type  $(m, m)$  il suffit de trouver une section holomorphe de  $F^{m+1}H^{2m}$  sur  $\Delta_2$ , soit  $(\omega_s)_{s \in \Delta_2}$ , telle que  $\lim_{s \rightarrow 0} \langle \nabla_{\partial/\partial s} \omega_s \cdot \delta_s \rangle \neq 0$ .

Soit  $P$  un polynôme homogène de degré  $(m - 1)(2m + 2)$  tel que  $P(x_0) \neq 0$ . D'après 1.12,  $\omega_s = \text{Res}_{\mathcal{Z}_s} P\Omega/F_s^m$  est une section holomorphe de  $F^{m+1}H^{2m}$  sur  $\Delta_2$ .

Maintenant  $F_s = F_0 + s^2F_1 + \dots$ , et l'on a, d'après [3], pour  $s \neq 0$ ,

$$\nabla_{\partial/\partial s} \left( \text{Res}_{\mathcal{Z}_s} \frac{P\Omega}{F_s^m} \right) = C \text{Res}_{\mathcal{Z}_s} \frac{P\partial F_s/\partial s \Omega}{F_s^{m+1}}$$

modulo  $F^{m+1}H^{2m}$ , où  $C$  est une constante non nulle.

Comme  $\delta_0$  est de type  $(m, m)$ , donc orthogonal à  $F^{m+1}H_{\text{lim}}^{2m}$ , on a:

$$\begin{aligned} \lim_{s \rightarrow 0} \langle \nabla_{\partial/\partial s} (\omega_s) \cdot \delta_s \rangle &= 2C \lim_{s \rightarrow 0} s \cdot \left\langle \text{Res}_{\mathcal{Z}_s} \frac{PF_1\Omega}{F_s^{m+1}} \cdot \delta_s \right\rangle \\ &= 2C \lim_{s \rightarrow 0} \int_{S_s} s \cdot \text{Res}_{\mathcal{Z}_s} \frac{PF_1\Omega}{F_s^{m+1}}, \end{aligned}$$

qui est non nul, d'après 1.13, et  $P(x_0) \neq 0, F_1(x_0) \neq 0$ ; d'où la proposition.

### 2. Preuve du théorème

**2.0.** On supposera dans la suite qu'il existe un changement de base  $\Delta_n \xrightarrow{r_n} \Delta$  et une variété  $\mathcal{Y} \xrightarrow{q} \Delta_n$ , isomorphe à  $\mathcal{X}_n$  au-dessus de  $\Delta^*$ , et telle que  $\mathcal{Y}_0$  soit lisse et cohomologiquement kählerienne. On note  $\psi: \mathcal{Y}^* \simeq \mathcal{X}_n^*$ ;  $\psi$  induit un isomorphisme en cohomologie:  $H^{2m}(\psi): R^{2m}p_n^*\mathbf{Z} \simeq R^{2m}q^*\mathbf{Z}$  sur  $\Delta_n^*$ . Comme le second faisceau est trivial sur  $\Delta_n^*$ , le premier l'est également, soit d'après 1.2,  $n$  pair,  $n = 2n_0$ . Le revêtement  $r_n: \Delta_n \rightarrow \Delta$  se factorise donc en  $\Delta_n \xrightarrow{r} \Delta_2 \xrightarrow{r_2} \Delta$ , où  $r$  est de degré  $n_0$ , et l'on a une application des périodes  $\mathcal{P}_2 \circ r$  sur  $\Delta_n$ . Par ailleurs on a le lemma suivant.

**2.1. Lemme.** *Sous les hypothèses de 2.0, la filtration de Hodge sur le faisceau  $R^{2m} q C$  associée à la famille  $\mathcal{Y} \rightarrow \Delta_n$  est de gradué localement libre.*

*Démonstration.*  $\mathcal{Y}_0$ , comme les fibres voisines  $\mathcal{Y}_s \simeq \mathcal{X}_s$  est cohomologiquement kählerienne; cela entraîne, par semicontinuité des nombres  $h^{p,q}$ , et par  $b_l = \sum_{p+q=l} h^{p,q}$ , que  $h^{p,q}(\mathcal{Y}_0) = h^{p,q}(\mathcal{Y}_s)$ . Le premier terme de la suite spectrale  $E_1^{p,q} = R^q q(\Omega_{\mathcal{Y}/\Delta_n}^p)$  est donc localement libre. Comme  $d_1 = 0$  pour  $s \neq 0$ , on en déduit  $d_1 = 0$  sur  $\Delta_n$ , et donc  $E_1^{p,q} = E_2^{p,q}$ . On voit de même que toutes les différentielles  $d_1$  s'annulent, et  $E_\infty^{p,q} = E_1^{p,q}$  est localement libre. Ce qui prouve le lemme.

**2.2.** Dans ces conditions, on a une application des périodes  $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}$  sur  $\Delta_n$ , holomorphe, naturellement à valeurs dans le même domaine  $D$  que  $\mathcal{P}_2 \circ r$ . Comme ces applications coïncident via  $H^{2m}(\psi)$  sur  $\Delta_n^*$ , elles sont égales sur  $\Delta_n$ .

Les lemmes suivants décrivent  $d\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}$  sur  $\Delta_n$ :

**2.3. Lemme.**  *$\mathcal{Y}_0$  a un fibré canonique trivial;  $R^1 q T_{\mathcal{Y}/\Delta_n}$  est localement libre;  $R^0 q K_{\mathcal{Y}/\Delta_n}$  est libre de rang 1; le choix d'une section  $(\omega_s)_{s \in \Delta_n}$  partout non nulle de  $R^0 q K_{\mathcal{Y}/\Delta_n}$  fournit un isomorphisme:*

$$R^1 q T_{\mathcal{Y}/\Delta_n} \xrightarrow{\omega} R^1 q \Omega_{\mathcal{Y}/\Delta_n}^{2m-1}.$$

*Démonstration.* Le premier fait découle de la semicontinuité de  $h^0(K_{\mathcal{Y}_s})$  et  $h^0(K_{\mathcal{Y}_s}^{-1})$ ; la trivialité de  $K_{\mathcal{Y}_s}$  entraîne alors:  $T_{\mathcal{Y}_s} \simeq \Omega_{\mathcal{Y}_s}^{2m-1}$ ,  $\forall s \in \Delta_n$ ; or d'après 2.1  $h^1(\Omega_{\mathcal{Y}/\Delta_n}^{2m-1})$  est constant. Donc  $h^1(T_{\mathcal{Y}_s})$  est constant, et  $R^1_q(T_{\mathcal{Y}_s})$  est localement libre. La dernière assertion est évidente.

**2.4.** Soit  $\rho_{\mathcal{Y}}: T_{\Delta_n} \xrightarrow{R^1 q} T_{\mathcal{Y}/\Delta_n}$  l'application de Kodaira-Spencer associée à la famille  $\mathcal{Y} \xrightarrow{q} \Delta_n$ , et soit  $\mathcal{P}_{\mathcal{Y},K}$  l'application des périodes pour les  $2m$ -formes sur  $\Delta_n$ , i.e.  $\mathcal{P}_{\mathcal{Y},K}(s) =$  le sous-espace  $H^{2m,0}(\mathcal{Y}_s) \subset H^{2m}(\mathcal{Y}_s, \mathbb{C})$ . Il est alors bien connu qu'on a la commutativité du diagramme:

$$\begin{array}{ccc}
 T_{\Delta_n} & \xrightarrow{d\mathcal{P}_{\mathcal{Y},K}} & \text{Hom}(R^0 q K_{\mathcal{Y}/\Delta_n}, R^{2m} q(\mathbb{C}_{\mathcal{Y}}) \otimes \mathcal{O}_{\Delta_n} / R^0 q K_{\mathcal{Y}/\Delta_n}) \\
 \downarrow \rho_{\mathcal{Y}} & \searrow & \uparrow i \\
 & & \text{Hom}(R^0 q K_{\mathcal{Y}/\Delta_n}, R^1 q \Omega_{\mathcal{Y}/\Delta_n}^{2m-1}) \\
 & & \omega \downarrow \\
 R^1 q (T_{\mathcal{Y}/\Delta_n}) & \xrightarrow[\omega]{\sim} & R^1 q \Omega_{\mathcal{Y}/\Delta_n}^{2m-1}
 \end{array}$$

où la flèche en pointillé signifie que  $d\mathcal{P}_{\mathcal{Y},K}$  se factorise, par transversalité, par l'inclusion  $i$ ; notons de plus que  $i$  est une inclusion de sous-fibrés vectoriels, d'après 2.1.

**2.5. Corollaire.** *L'ordre de ramification de  $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}$  en zéro est égal à celui de  $\mathcal{P}_{\mathcal{Y},K}$  en 0.*

En effet,  $\mathcal{P}_{\mathcal{Y},K}$  se factorise par  $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}$ , donc l'inégalité dans un sens est évidente. Mais d'autre part  $d\mathcal{P}_{\mathcal{Y}}$  se factorise par  $\rho_{\mathcal{Y}}$  qui s'identifie d'après le diagramme précédent à  $d\mathcal{P}_{\mathcal{Y},K}$ .

**2.6.** Maintenant, l'absurdité de 2.0 est claire; en effet  $\mathcal{P}_{\mathcal{Y}} = \mathcal{P}_2 \circ r$ : d'après la §1,  $d\mathcal{P}_2(0) \neq 0$ , tandis que  $d\mathcal{P}_{2,K}(0) = 0$ . On en déduit que  $\mathcal{P}_2 \circ r$  se ramifie à l'ordre  $n_0$ , tandis que  $\mathcal{P}_{2,K} \circ r$  se ramifie à un ordre strictement supérieur à  $n_0$ , ce qui contredit 2.5.

**2.7.** La dernière assertion du théorème résulte du fait que si  $\mathcal{X}_n$  est biméromorphe à  $\mathcal{X}_n$ , alors  $\mathcal{X}_{n,0}$  est une variété de Moishezon, donc cohomologiquement kählérienne.

**2.8. Problème.** La question soulevée par Friedman reste ouverte tant que l'on ne peut pas supprimer l'hypothèse:  $\mathcal{Y}_0$  est cohomologiquement kählérienne.

Je ne connais pas de variété limite de variétés kählériennes et non cohomologiquement kählérienne: en existe-t-il?

Utilisant les hypothèses supplémentaires faites sur la famille (par exemple  $b_2(\mathcal{X}_s) = 1$ ,  $\pi_1(\mathcal{X}_s) = 0$ , etc), peut-on prouver que la variété  $\mathcal{Y}_0$  doit être cohomologiquement kählérienne?

## References

- [1] A. Andreotti & T. Frankel, *The second Lefschetz theorem on hyperplane sections*, Global Analysis (A symposium in honor of K. Kodaira), Princeton University Press, Princeton, NJ, 1969, 1–20.
- [2] M. F. Atiyah, *On analytic surfaces with double points*, Proc. Roy. Soc. London Ser. A **247** (1958) 237–244.
- [3] J. Carlson & P. Griffiths, *Infinitesimal variation of Hodge structure and the global Torelli problem*, Géométrie Algébrique, Sijthoff and Noordhoff, Angers, 1980, 51–76.
- [4] C. H. Clemens, *Degeneration of kähler manifolds*, Duke Math. J. **44** (1977) 215–290.
- [5] —, *Double solids*, Advances in Math. **47** (1983) 107–230.
- [6] R. Friedman, *A degenerating family of quintic surfaces with trivial monodromy*, Duke Math. J. **50** (1983) 203–214.
- [7] P. Griffiths, *On the periods of certain rational integrals. I, II*, Ann. of Math. (2) **90** (1969) 460–541.
- [8] —, *Periods of integrals on algebraic manifolds. III*, Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. **38** (1970) 125–180.
- [9] J. W. Morgan, *Topological triviality of various analytic families*, Duke Math. J. **50** (1983) 215–225.
- [10] J. Steenbrink, *Limits of Hodge structures*, Invent. Math. **31** (1976) 229–257.

UNIVERSITÉ DE PARIS-SUD